05.07.2021

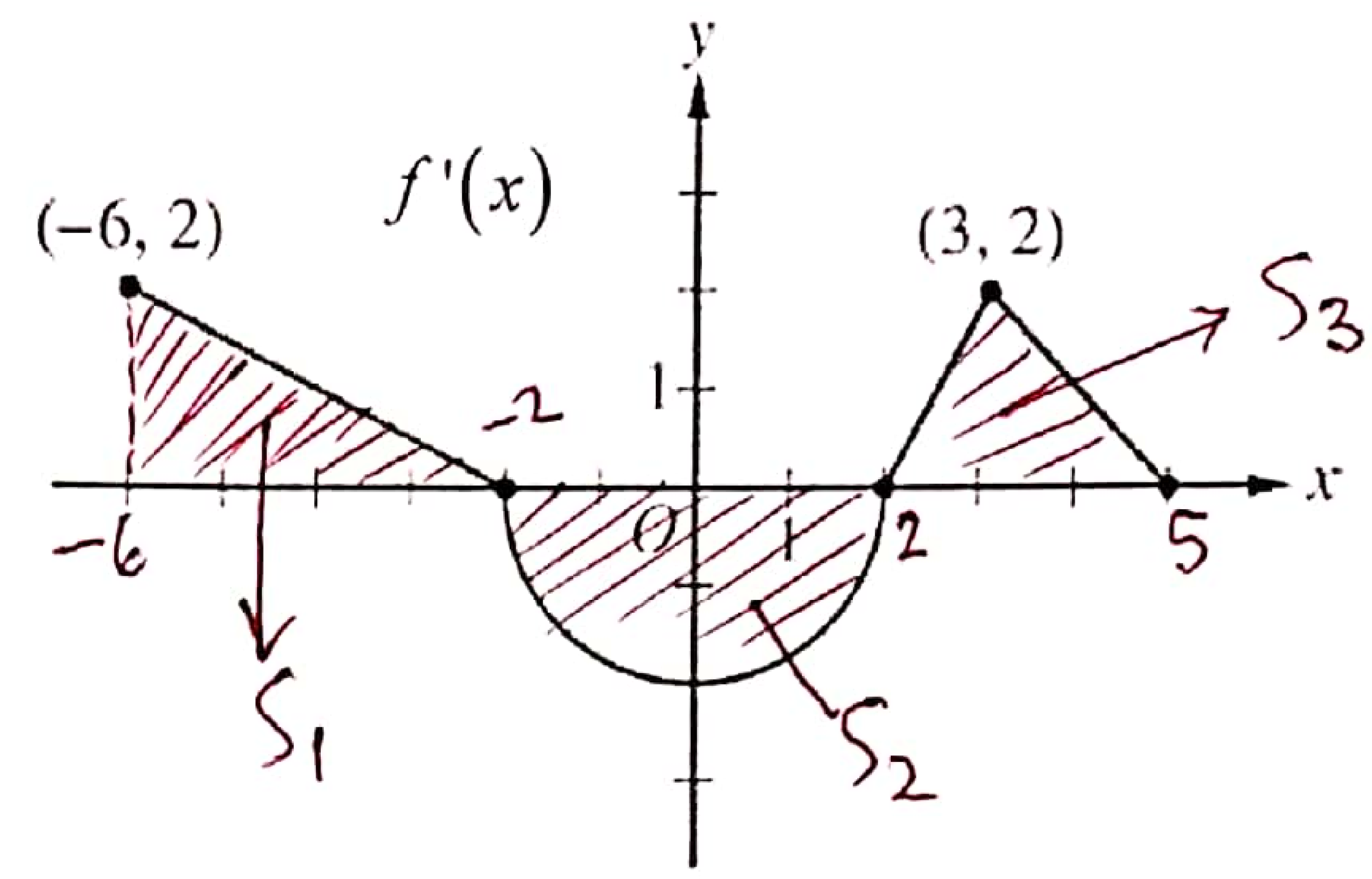
1) Yandaki şekilde $[-6,5]$ aralığında türevlenebilir ve $f(-2)=7$ koşulunu sağlayan $f(x)$ – in türevinin grafiği verilmiştir. Bu grafik üç doğru parçası ve bir yarım çemberden oluşmaktadır. Buna göre

(a) $f(-6)$ ve $f(5)$ değerlerini bulunuz.

(b) $f(x)$ – in monotonluğunu ve bükeyliğini inceleyiniz.

(c) Mutlak minimum ve mutlak maksimum değerlerini bulunuz.

(d) $\int_{-6}^{2} \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ integralini hesaplayınız. **(25 puan)**



$$S_1 = 4 = \int_{-6}^{-2} f'(x)dx$$

$$S_2 = -2\pi = \int_{-2}^{2} f'(x)dx \quad , \quad S_3 = 3 = \int_{2}^{5} f'(x)dx \text{ olur.}$$

(a) $$4 = \int_{-6}^{-2} f'(x)dx = f(-2) - f(-6) \Rightarrow f(-6) = 3$$

$$S_2 + S_3 = 3 - 2\pi = \int_{-2}^{5} f'(x)dx = f(5) - f(-2) \Rightarrow$$
$$f(5) = 10 - 2\pi$$

(b)

x	−6		−2		2		5
f'		+	0	−	0	+	
f		↗		↘		↗	

$(-6,-2) \cup (2,5)$ kümesinde artan, $(-2,2)$ aralığında azalandır.

x	−6		−2		0		2		3		5
f''		−	0	−	0	+	0	+	0	−	
f		⌒		⌒		∪		∪		⌒	

$(-6,0) \cup (3,5)$ kümesinde aşağı bükey, $(0,3)$ aralığında yukarı bükeydir.

$x=-2$, $x=2$, $x=3$ noktalarında f'' yoktur. $x=0$ tek dönüm noktasıdır.

CamScanner ile tarandı

(c) $x=-6$, $x=2$ yerel minimum
$x=-2$, $x=5$ yerel maksimum noktalasıdır.

$f(-6)=3$ ve $-2\pi=\int_{-2}^{2} f'(x)\,dx \Rightarrow f(2)=7-2\pi$

olmasıyla mutlak minimum $-7-2\pi$ değeidir.

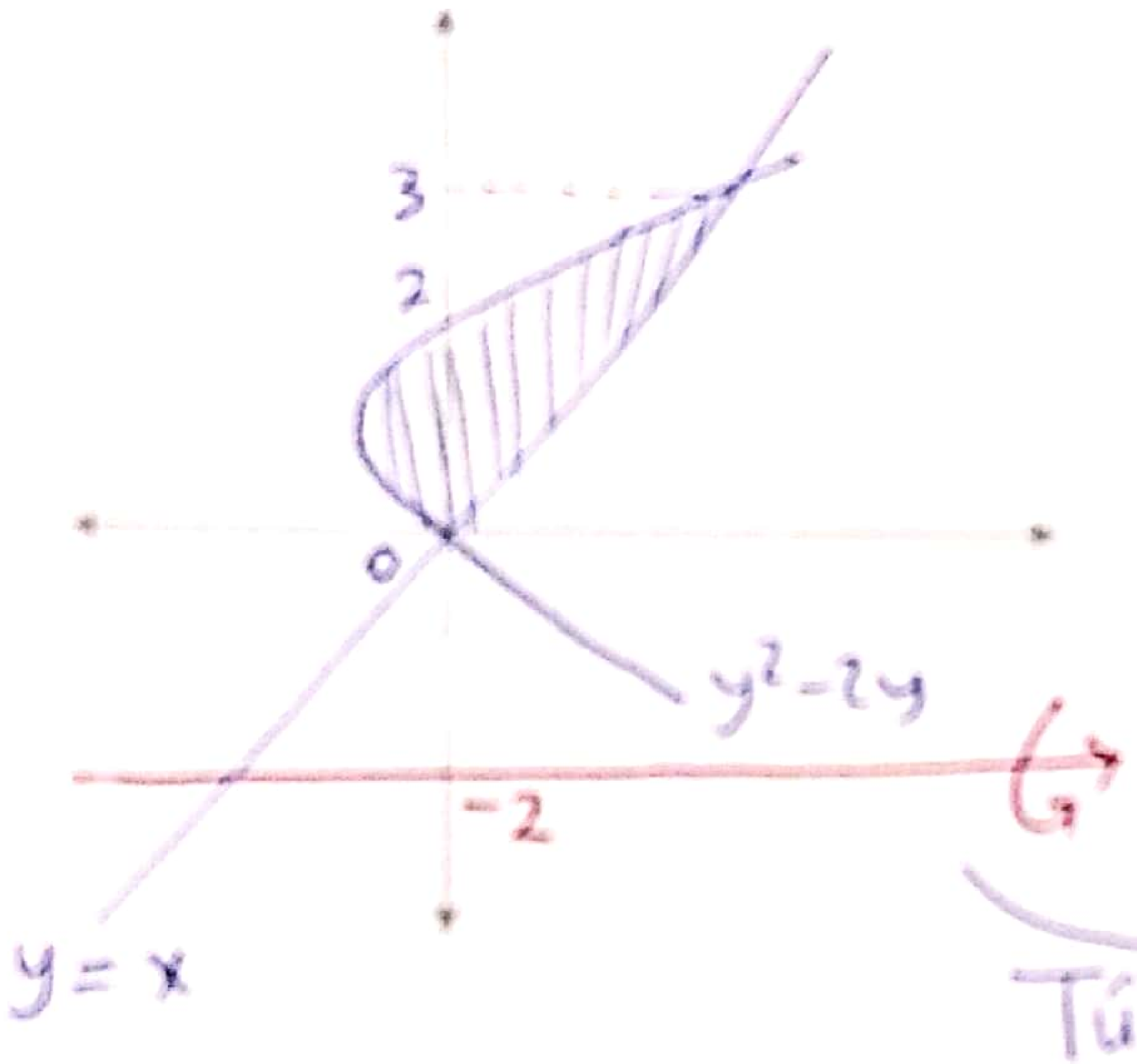
$f(-2)=7$, $f(5)=10-2\pi$ old. dan mutlak maks. değei 7 dir.

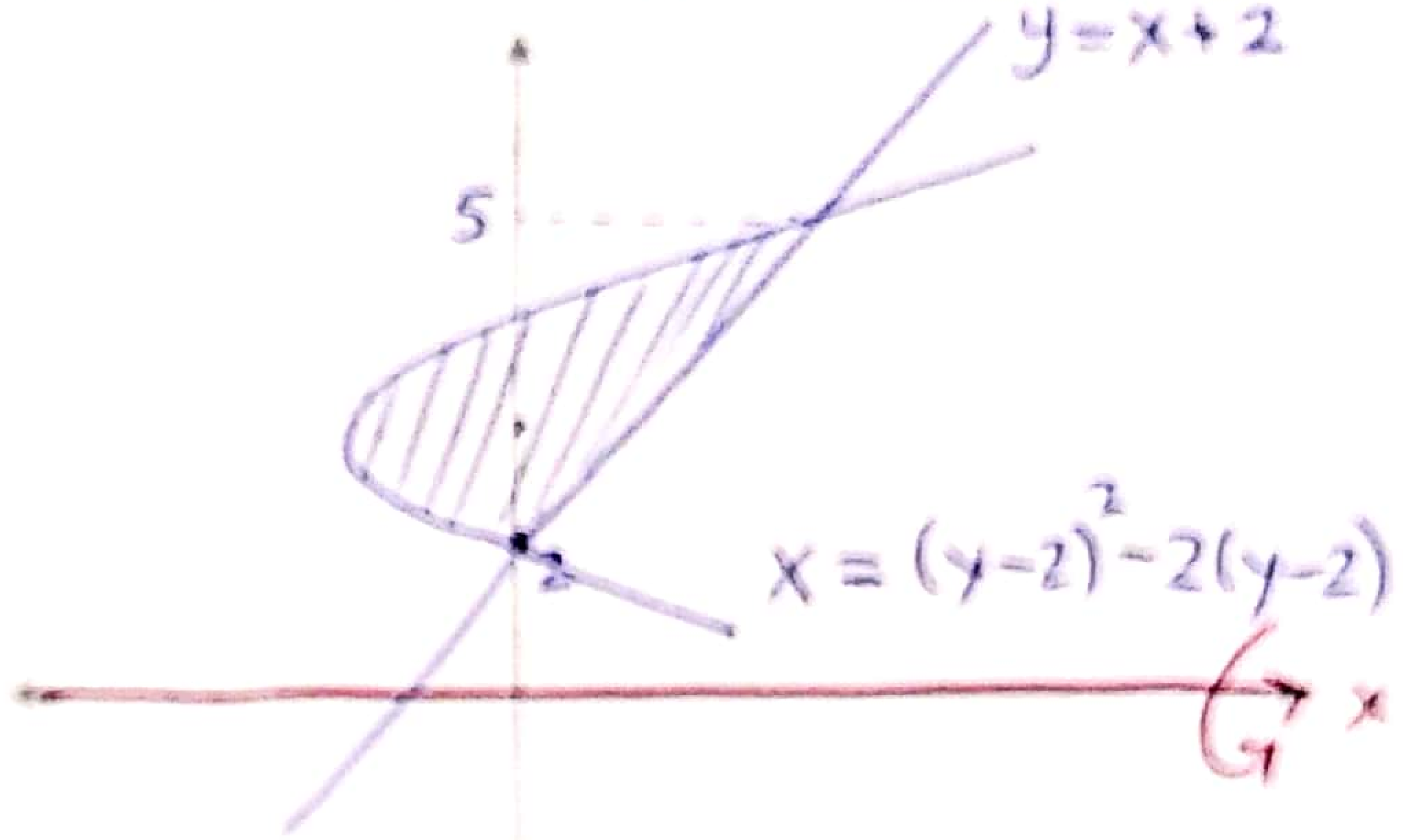
(d) $\int_{-6}^{2} \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|\Big|_{-6}^{2} = \ln|f(2)|-\ln|f(-6)|$

$= \ln(7-2\pi)-\ln 3 = \ln\left(\frac{7-2\pi}{3}\right)$ dır.

CamScanner ile tarandı

2) $x = y^2 - 2y$ eğrisi ve $y = x$ doğrusunun sınırlandırdığı bölgenin $y = -2$ doğrusu etrafında dönmesi sonucu oluşan cismin hacmini bulunuz. **(20 puan)**





Tüm sistemi 2 br yukarı öteleyerek

$$V = 2\pi \int_2^5 y \cdot \left[(y-2) - (y-2)^2 + 2(y-2) \right] \cdot dy$$

$$= 2\pi \int_2^5 y \left(3y - 6 - y^2 + 4y - 4 \right) \cdot dy$$

$$= 2\pi \left(-5y^2 + \frac{7y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_2^5 = \frac{63\pi}{2}$$

CamScanner ile tarandı

3) $y=(arc\cot x)^{\frac{\cos\sqrt{x}}{2\ln x}}$ için $y'=?$ (sadece sonucu yazmayınız) **(10 puan)**

$$y=(\text{arccot}\,x)^{\frac{\cos\sqrt{x}}{2\ln x}} \Rightarrow \ln y=\frac{\cos\sqrt{x}}{2\ln x}\cdot\ln(\text{arccot}\,x) \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{-\sin\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot 2\ln x-\cos\sqrt{x}\cdot\frac{2}{x}}{(2\ln x)^2}\cdot\ln(\text{arccot}\,x)+$$

$$\frac{\cos\sqrt{x}}{2\ln x}\cdot\frac{-1}{(1+x^2)\cdot\text{arccot}\,x} \quad \text{olur.}$$

4) $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x-2}}$ integralini hesaplayınız. (sadece sonucu yazmayınız) **(15 puan)**

$x-1=\frac{1}{t}$ alınırsa $dx=\frac{-1}{t^2}\cdot dt \Rightarrow$

$$J=\int\frac{1}{(x-1)(x^2+x-2)^{1/2}}\cdot dx=\int\frac{t}{\sqrt{\left(\frac{1+t}{t}\right)^2+\frac{1+t}{t}-2}}\cdot\frac{-1}{t^2}\cdot dt \Rightarrow$$

$$=\int\frac{\cancel{t^2}}{\sqrt{1+2t+t^2+t+t^2-2t^2}}\cdot\frac{-1}{\cancel{t^2}}\cdot dt=\int\frac{-1\cdot dt}{\sqrt{1+3t}}$$

$\Rightarrow 1+3t=u$ alınırsa $3\cdot dt=du \Rightarrow$

$$J=\int\frac{-1\cdot du/3}{\sqrt{u}}=\frac{-1}{3}2\sqrt{u}=\frac{-1}{3}2\sqrt{1+3t}$$

$$=\frac{-2}{3}\sqrt{1+\frac{3}{x-1}}+c \quad \text{olur.}$$

CamScanner ile tarandı

5) $\int_0^{\pi/2} \frac{5dx}{3\sin x + 4\cos x}$ integralini hesaplayınız. (sadece sonucu yazmayınız) **(15 puan)**

$$M = \int_0^{\pi/2} \frac{5 \cdot dx}{3\sin x + 4\cos x} \Rightarrow$$

$\tan \frac{x}{2} = u$ degisken degişimi yapılırsa $x = \pi/2 \to u = 1$, $x = 0 \to u = 0$

$$M = \int_0^1 \frac{5 \cdot \frac{2du}{1+u^2}}{3\frac{2u}{1+u^2} + 4\frac{1-u^2}{1+u^2}} = \int_0^1 \frac{10 \cdot du}{6u+4-4u^2} = \int_0^1 \frac{-5 \cdot du}{2u^2-3u-2}$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{A}{2u+1} + \frac{B}{u-2}\right) du = \int_0^1 \left(\frac{2}{2u+1} + \frac{-1}{u-2}\right) du$$

$$= \ln|2u+1| \Big|_0^1 - \ln|u-2| \Big|_0^1 = \ln 3 - \ln 1 - \ln 1 + \ln 2$$

$$= \ln 3 + \ln 2 = \ln 6$$

6) $\int_0^2 \frac{|x^2-1|}{[\![x^2+1]\!]} dx$ integralini hesaplayınız. (sadece sonucu yazmayınız) **(15 puan)**

$|x^2-1|$-in kritik noktaları $x = \mp 1$;

$[\![x^2+1]\!] = [\![x^2]\!] + 1$ -in kritik noktaları içini tam sayı yapan $x=0$, $x=1$, $x=\sqrt{2}$, $x=\sqrt{3}$, ... olup $f(x) = \frac{|x^2-1|}{[\![x^2+1]\!]}$ ile

$$I = \int_0^2 \frac{|x^2-1|}{[\![x^2+1]\!]} dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^{\sqrt{2}} f(x)dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} f(x)dx + \int_{\sqrt{3}}^2 f(x)dx$$

$$= \int_0^1 (1-x^2)dx + \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x^2-1}{2} dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x^2-1}{3} dx + \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{x^2-1}{4} dx$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2-\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{9} + \frac{1}{6} = \frac{21-\sqrt{2}}{18} \text{ olur.}$$

CamScanner ile tarandı